

Moltiplicatori

1) Moltiplicazioni binarie

a. $1001_2 * 110_2 = ?_2$

$$\begin{aligned} 1001_2 * 110_2 &= 1001_2 * 0_2 + 1001_2 * 10_2 + 1001_2 * 100_2 \\ &= 0_2 + 10010_2 + 100100_2 \\ &= 110110_2 \end{aligned}$$

1	0	0	1	*		
	1	1	0	=		
				0	+	0
1	0	0	1	←	+	1
1	0	0	1	←	=	1
1	1	0	1	1		0

La moltiplicazione binaria si esegue in maniera simile alla moltiplicazione decimale classica. Per le proprietà dell'aritmetica binaria tutto il processo si riduce ad una sequenza di shift a sinistra e somme.

Per ogni cifra del moltiplicatore si esegue un shift a sinistra del primo termine. Il termine shiftato si somma al totale solo se il corrispondente bit del secondo termine è a 1. In altri termini, ogni shift viene messo in AND con il corrispondente bit del moltiplicatore e quindi sommato.

b. $101_2 * 1101_2 = ?_2$

			1	0	1	*		
		1	1	0	1	=		
			1	0	1	+	1	1
				0	←	=	0	1
		1	0	1	←		1	1
		1	1	1	0	1		
1	1	0	1	0	0	1		→1000001 ₂

c. $11101_2 * 1011_2 = ?_2$

			1	1	1	0	1	*		
			1	0	1	1	=			
		1	1	1	1	0	1	+	1	1
		1	1	1	0	1	←	=	1	1
	1	1	1	1	0	1	+		0	1
		0	←						1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1		→100111111 ₂

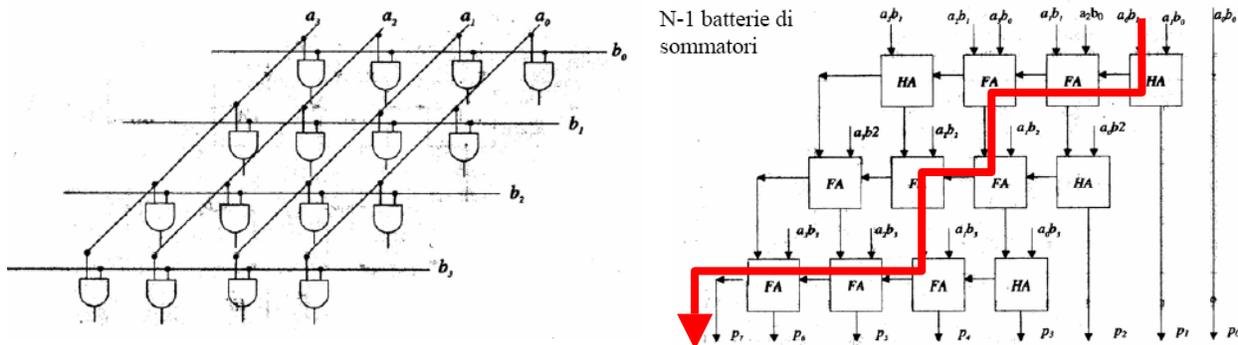
d. $10111_2 * 111_2 = ?_2$

			1	0	1	1	1	*		
			1	1	1	=				
		1	0	1	1	1	+	1	1	1
	1	0	1	1	1	←	=	1	1	1
	1	1	1	1	0	1	+		1	1
		0	←						1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1		→10100001 ₂

2) Moltiplicatore veloce

Il circuito della moltiplicazione può essere visto come una matrice di AND seguita da una matrice di sommatore FA-HA. Ogni bit b_i del moltiplicatore si comporta come un gate per la corrispondente parola del moltiplicando opportunamente shiftata a sinistra di i posizioni.

Nota: L'operazione di shift a sinistra equivale in algebra binaria ad una moltiplicazione per 10_2 , analogamente lo shift a destra equivale ad una divisione per 10_2 .



Nota: HA è più rapido di FA:

HA → Cammino Critico $S = 1$, $R_{out} = 1$

FA → Cammino Critico $S = 2$, $AB-R_{out} = 3$,

$Rin-R_{out}=2$ (se AB è disponibile un ciclo prima)

quindi il percorso critico a parità di moduli attraversati è quello che attraversa un maggior numero di FA.

Il percorso più lungo è quello che propaga gli effetti dei bit a_0 e b_0 su r_n . Per propagare il riporto verso sinistra occorrono 3 unità di tempo (per semplicità consideriamo il cammino critico massimo del resto anche se occorrono solo 2 unità se gli operandi sono stabili da almeno un'unità di tempo), per passare al livello successivo di sommatorie occorrono 2 unità di tempo.

Possiamo dare una stima del cammino critico di questo tipo di moltiplicatore ($n > 3$):

$$\begin{aligned} n.ro \text{ passi verso sinistra} + n.ro \text{ passi verso il basso} + 1^{mo} HA + \text{Calcolo dei termini} = \\ = [n + (n - 3)] * 3 + (n - 2) * 2 + 1 + 1 = 21 \end{aligned}$$

(Per $n \leq 3$ non possibile evitare gli HA sul bordo)

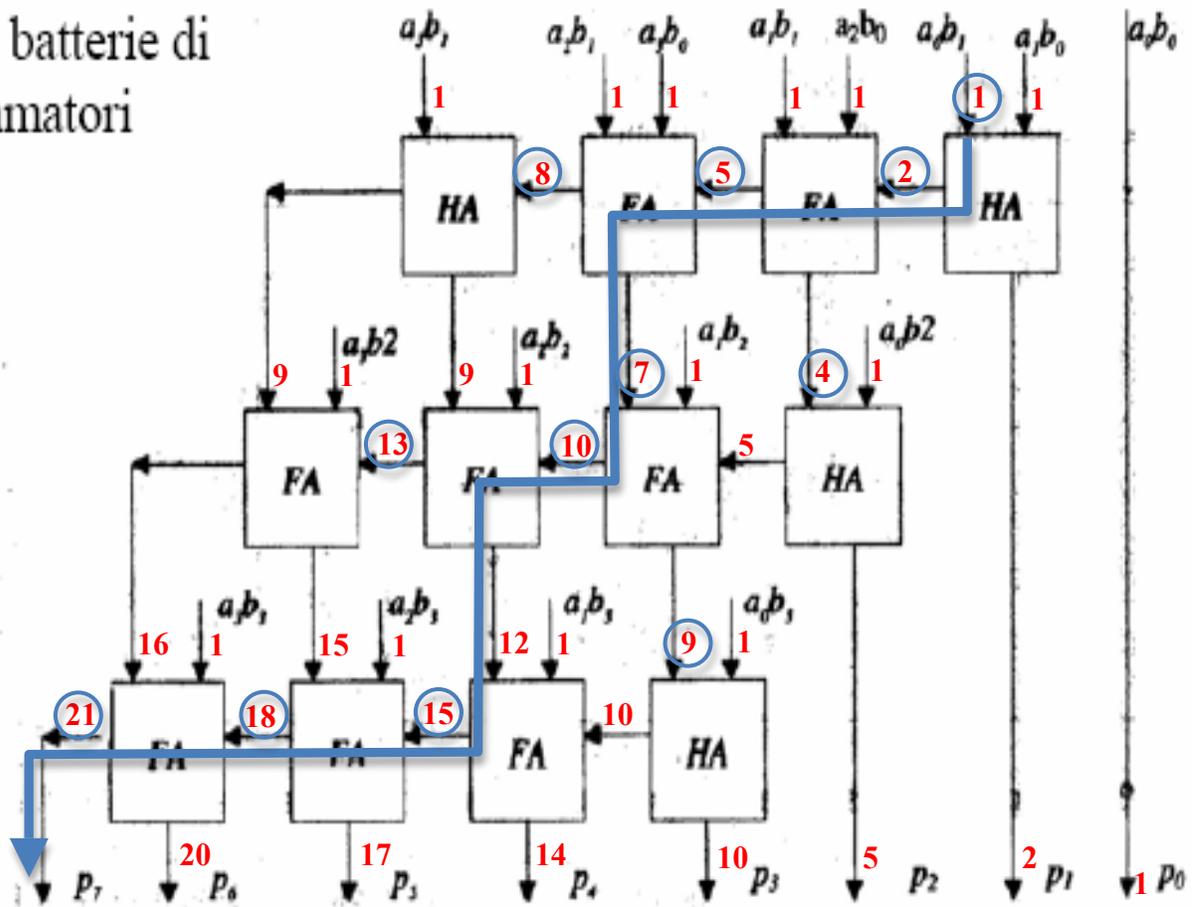
Per confronto, realizzare la moltiplicazione con l'algoritmo delle somme successive richiede $n-1$ somme a n bit (anche se il risultato è a $2n$ bit, i termini realmente sommati sono solo n) + $n-1$ operazioni di shift. Se utilizziamo sommatore classici e consideriamo l'operazione di shift a costo unitario, il costo di questo tipo di moltiplicatore è (al più, alcune somme possono essere saltate):

$$(1+2*n) * (n-1) + (n-1) = (1+2*4)*3 + 3 = 30.$$

*Nota: la lunghezza del risultato di una moltiplicazione sarà al più la somma della lunghezza dei due termini. Es: 8 bit * 8 bit → 16 bit $1111\ 1111_2 * 1111\ 1111_2 = 1111\ 1110\ 0000\ 0001_2$*

Verifichiamo in dettaglio il risultato precedente. Ad ogni passo consideriamo il cammino critico delle uscite degli HA pari ad 1 in più rispetto all'ingresso più lento, mentre per gli FA consideriamo un cammino critico per Rout pari a 3 e un cammino critico per S pari a 2 rispetto all'ingresso più lento

N-1 batterie di sommatori

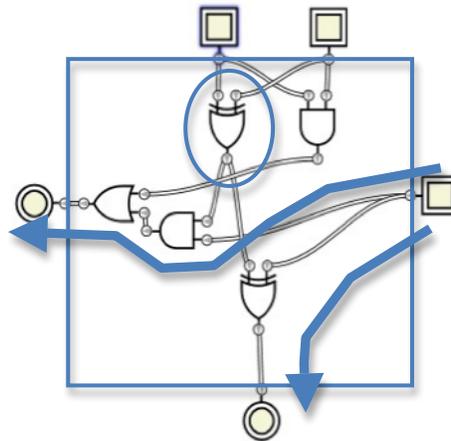


Quindi il cammino critico effettivo del circuito è 21.

12
1

Facoltativo) *Il cammino critico nel dettaglio*

Il modulo FA in realtà è più complesso di quello considerato in termini di cammino critico. Guardiamo nel dettaglio l'interno di un modulo FA:



Se la porta XOR indicata riceve i segnali A e B con sufficiente anticipo rispetto a Rin, allora il transito all'interno del modulo avviene in un tempo inferiore a quello indicato, in particolare occorre solo *una* unità di tempo per propagare Rin verso S e *due* unità di tempo per propagare Rin a Rout.

Proviamo a riconsiderare il cammino del moltiplicatore hardware:

N-1 batterie di sommatatori

